ΛΟΓΙΣΜΟΣ 9-3-2017

ΑΝΟΛΟΝΟΜΟΙ ΔΕΣΜΟΙ

ρεόνομοι και σκληρόνομοι

- $f_1(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_N, y_N, z_N) \geq 0$
- $f_2(x_1, y_1, z_1, \dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{z}_2, \ldots, x_N, y_N, z_N) = 0$

<u>πχ</u>

Έστω $\underbrace{\text{υλικό σημείο}}^{\text{Υ.Σ.}}$ με συντεταγμένες (x_1, y_1, z_1).

Κινείται το Υ.Σ. στο εσωτερικό μιας σφαίρας με κέντρο $K(a_1, a_2, a_3)$ και ακτίνα R άρα

$$(x_1 - a_1)^2 + (y_1 - a_2)^2 + (z_1 - a_3)^2 \leq R^2$$

$$3 - \overset{1 \text{ δεσμός}}{1} = 2 \text{ βαθμοί ελευθερίας}$$

Ειδική περίπτωση

$$f_1(\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{z}_2, \ldots, \dot{x}_N, \dot{y}_N, \dot{z}_N) = 0 \xLeftrightarrow{\text{θέτω}}$$

$f_1(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_{3N}) = 0$ διαφορίζω ως προς t:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}_1} d\dot{x}_1 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}_{3N}} d\dot{x}_{3N} = 0$$

θέτω $\frac{\partial f_j}{\partial \dot{x}_i} = a_{j,i}$ άρα $a_{1,1} d\dot{x}_1 + a_{1,2} d\dot{x}_2 + \ldots + a_{1,3N} d\dot{x}_{3N} = 0$

2 κατηγορίες δυνάμεων

Δεσμικές (εξωτερικές) και επιβεβλημένες (εσωτερικών)

Συμβολισμός: $F_i^{(\delta)}$ και $F_i^{(\varepsilon)}$

Εξισώσεις Κίνησης: $m \frac{\partial^2 r_i}{\partial t^2} = F_i^{(\delta)} + F_i^{(\varepsilon)}$ άρα

$$F_i^{(\delta)} = F_{ix}^{(\delta)} \vec{x_0} + F_{iy}^{(\delta)} \vec{y_0} + F_{iz}^{(\delta)} \vec{z_0}$$

$$F_i^{(\varepsilon)} = F_{ix}^{(\varepsilon)} \vec{x_0} + F_{ix}^{(\varepsilon)} \vec{y_0} + F_{iz}^{(\varepsilon)} \vec{z_0}$$

$$\frac{\partial^2 r_i}{\partial t^2} = \ddot{x}_{ix}\vec{x}_0 + \ddot{y}_{iy}\vec{y}_0 + \ddot{z}_{iz}\vec{z}_0$$

Κίνηση πάνω σε γνωστή επιφάνεια (Μεθοδολογία)

Έστω δεσμός $f(x,y,z,t)=0$ (σκληρόνομος - ρεόνομος)

$$m\ddot{r} = F^{(\varepsilon)} + \lambda \,\text{grand}\, F$$

$$F^{(\delta)} = \lambda \,\text{grand}\, f$$

όπου $\text{grand}\, f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{x}_0 + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{y}_0 + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{z}_0$

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} \\ m\ddot{y} &= F_y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} \\ m\ddot{z} &= F_z + \lambda\frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned}\right\} \text{άγνωστοι: } \lambda, x(t), y(t), z(t)$$

$$f(x,y,z,t)=0$$

1ο βήμα: Παραγωγίζουμε ως προς το χρόνο $f(x,y,z,t)=0$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\dot{z}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial x}\ddot{x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\dot{y} + \frac{\partial f}{\partial y}\ddot{y} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\dot{z} + \frac{\partial f}{\partial z}\ddot{z}.$$

2ο βήμα: Αντικαθιστώ τις $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ και λύνουμε ως προς λ

3ο βήμα: Βρίσκω το λ και το αντικαθιστώ στις εξισώσεις κίνησης

Κίνηση πάνω σε γνωστή καμπύλη (Μεθοδολογία)

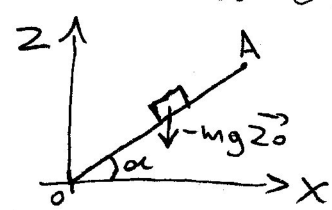
- $f_1(x,y,z,t)=0$
- $f_2(x,y,z,t)=0$

$$m\ddot{r} = F^{(\varepsilon)} + F^{(\delta)}$$

$$F^{(\delta)} = \lambda_1 \,\mathrm{grand}\, f_1 + \lambda_2 \,\mathrm{grand}\, f_2$$

Άσκηση

Ένα σώμα ολισθαίνει χωρίς τριβή στο κεκλιμένο επίπεδο ΟΑ υπό την επίδραση της βαρύτητας



α) Να βρεθούν οι εξισώσεις του δεσμού

β) Να γραφούν οι εξισώσεις Lagrange 1ου είδους.

γ) Να γίνει απαλοιφή των παραμέτρων και να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης

Λύση

α) $f_1(x,y,z) \equiv x\sin\alpha - z\cos\alpha \Leftrightarrow z = x\,tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}x$

$f_2(x,y,z) \equiv \boxed{y=0}$

β)
$$\left\{\begin{array}{l} m\ddot{x} = \cancel{F_x^{(\varepsilon)}}^{\,0} + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x} \\ m\ddot{y} = \cancel{F_y^{(\varepsilon)}}^{\,0} + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial y} \\ m\ddot{z} = \cancel{F_z^{(\varepsilon)}}^{\,-mg} + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial z} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{m\ddot{r} = F^{(\varepsilon)} + F^{(\delta)}}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} m\ddot{x} = \lambda_1\sin\alpha \\ m\ddot{y} = \lambda_2 \\ m\ddot{z} = -mg - \lambda_1\cos\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \ddot{x} = \frac{\lambda_1\sin\alpha}{m} \\ \ddot{y} = \frac{\lambda_2}{m} \\ \ddot{z} = \frac{-mg-\lambda_1\cos\alpha}{m} \end{array}\right.$$

παραγωγίζω 2 φορές ως προς t το σύστημα του (α):

$$\ddot{x}\sin\alpha - \ddot{z}\cos\alpha = 0$$

$$\ddot{y} = 0$$

Αντικαθιστώ στο πάνω σύστημα:

aptsiakalos@hotmail.com

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\lambda_1 \sin\alpha}{m}\sin\alpha - \dfrac{-mg-\lambda_1\cos\alpha}{m}\cos\alpha = 0 \\ \dfrac{\lambda_2}{m} = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{\lambda_2 = 0}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_1 \dfrac{\sin^2\alpha}{m} + \lambda_1 \dfrac{\cos^2\alpha}{m} = -mg\cos\alpha \Rightarrow \dfrac{\lambda_1}{m} = -g\cos\alpha \Rightarrow \lambda_1 = -mg\cos\alpha \\ \lambda_2 = 0 \end{array}\right.$$

<u>Άσκηση</u>

Ένα σώμα με μάζα m κινείται χωρίς τριβή στην επιφάνεια της σφαίρας: $x^2+y^2+z^2=\alpha^2$ υπό την επίδραση της δύναμης $F\left(\dfrac{K_1}{x^3}, \dfrac{K_2}{y^3}, \dfrac{K_3}{z^3}\right)$ όπου K_1, K_2, K_3 σταθερές.

Ν.δ.ο. η αντίδραση της επιφάνειας έχει σταθερό μέτρο $\left[\,|F^{(\delta)}| = c\,\right]$